Disuguaglianza epiperimetrica

Per ogni $u \in H^1(B_1)$ definiamo il funzionale

$$W(u) := \int_{B_1} |\nabla u|^2\,dx - \int_{\partial B_1} u^2\,d\mathcal{H}^{d-1}.$$

Teorema 1 (Disuguaglianza epiperimetrica)**.** *Esiste una costante dimensionale $\varepsilon \in (0,1)$ tale che per ogni funzione 1-omogenea $z : B_1 \to \mathbb{R}$, $z \in H^1(B_1)$, esiste una funzione $h : B_1 \to \mathbb{R}$ tale che*

$$h = z \quad su \quad \partial B_1 \qquad e \qquad W(h) \le (1-\varepsilon)W(z).$$

Proof. Se $W(z) \le 0$, possiamo scegliere il competitore h semplicemente come $h = z$.

Supponiamo quindi che

$$W(z) > 0.$$

Osserviamo che possiamo scrivere

$$z(r,\theta) = r\phi(\theta) \quad \text{per ogni} \quad r \in (0,1), \quad \theta \in \partial B_1,$$

dove $\phi \in H^1(\partial B_1)$ Consideriamo lo sviluppo di ϕ in armoniche sferiche su ∂B_1.

$$\phi(\theta) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k \phi_k(\theta).$$

Allora, l'energia della funzione 1-omogenea z è data da

$$\begin{aligned} W(z) &= \int_{B_1} |\nabla z|^2\,dx - \int_{\partial B_1} z^2 \\ &= \int_0^1 r^{d-1} \int_{\partial B_1} \Big(\phi^2(\theta) + |\nabla_\theta \phi(\theta)|^2\Big)\,d\theta\,dr - \int_{\partial B_1} \phi^2(\theta)\,d\theta \\ &= \frac{1}{d} \int_{\partial B_1} \Big(|\nabla_\theta \phi(\theta)|^2 - (d-1)\phi^2(\theta)\Big)\,d\theta. \end{aligned}$$

Usando lo sviluppo di ϕ in armoniche sferiche, otteniamo

$$\begin{aligned} W(z) &= \sum_{k=0}^{+\infty} c_k^2 \frac{1}{d} \int_{\partial B_1} \Big(|\nabla_\theta \phi_k(\theta)|^2 - (d-1)\phi_k^2(\theta)\Big)\,d\theta \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} c_k^2 \frac{1}{d}\Big(\lambda_k - (d-1)\Big) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k^2 \frac{1}{d}\Big(\alpha_k(\alpha_k + d - 2) - (d-1)\Big) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} c_k^2 \frac{1}{d}(\alpha_k - 1)\big(\alpha_k + (d-1)\big). \end{aligned}$$

Consideriamlo ora la funzione armonica

$$h(r,\theta) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k r^{\alpha_k} \phi_k(\theta).$$

L'energia di h è data da

$$W(h) = \int_{B_1} |\nabla h|^2\,dx - \int_{\partial B_1} h^2 = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k^2 \big(\alpha_k - 1\big).$$

Se $\alpha_k = 1$, allora abbiamo

$$\frac{1}{d}(\alpha_k - 1)(\alpha_k + d - 1) = 0 = \alpha_k - 1.$$

Per $\alpha_0 = 0$, invece,

$$\frac{1}{d}(\alpha_0 - 1)(\alpha_0 + d - 1) = -\frac{d-1}{d} \qquad \text{e} \qquad \alpha_0 - 1 = -1.$$

Per tutti gli altri indici k tali che $\alpha_k \geq 2$, si ha

$$\begin{aligned}(\alpha_k - 1) - (1-\varepsilon)\frac{1}{d}(\alpha_k - 1)\big(\alpha_k + (d-1)\big) &= \frac{\alpha_k - 1}{d}\Big(d - (1-\varepsilon)\big(\alpha_k + (d-1)\big)\Big) \\ &= \frac{\alpha_k - 1}{d}\Big(1 - (1-\varepsilon)\alpha_k + \varepsilon(d-1)\Big) \\ &\leq \frac{\alpha_k - 1}{d}\Big(1 - (1-\varepsilon)2 + \varepsilon(d-1)\Big) \\ &\leq \frac{\alpha_k - 1}{d}\Big(-1 + \varepsilon(d+1)\Big),\end{aligned}$$

Quindi, basta scegliere

$$\varepsilon = \frac{1}{d+1}.$$

$\square$